Αλγεβρικες Δομες I

Τεταρτη 28 Ιανουαριου 2015

Θέμα 1. **[10]** Να δειχθεί ότι μια ομάδα G έχει ακριβώς δύο υποομάδες αν και μόνον αν η G είναι πεπερασμένη κυκλική ομάδα με τάξη έναν πρώτο αριθμό.

Θέμα 2. **[10]** Να βρεθούν οι γεννήτορες και οι υποομάδες της κυκλικής ομάδας $\mathbb{Z}_{24}$. Ακολούθως να σχεδιαστεί το διάγραμμα Hàsse των υποομάδων της $\mathbb{Z}_{24}$.

Θέμα 3. 1. **[10]** Να δειχθεί ότι το υποσύνολο (ι είναι η ταυτοτική μετάθεση)

$$H = \{\iota,\ (1\,2)(3\,4),\ (1\,3)(2\,4),\ (1\,4)(2\,3)\} \subseteq S_4$$

είναι μια αβελιανή υποομάδα της εναλλάσσουσας ομάδας A_4, και ακολούθως να προσδιορισθούν τα αριστερά σύμπλοκα (αριστερές πλευρικές κλάσεις) της H στην A_4.

2. **[10]** Θεωρούμε την ακόλουθη μετάθεση

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 5 & 4 & 8 & 7 & 9 & 10 & 2 & 3 & 11 & 12 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in S_{12}$$

(α') Να γραφεί η σ ως γινόμενο ξένων κύκλων και ως γινόμενο αντιμεταθέσεων.
(β') Να εξετασθεί αν η σ είναι άρτια ή περιττή μετάθεση, και να βρεθεί η τάξη της.
(γ') Να βρεθεί η ματάθεση σ^{2015}.

Θέμα 4. 1. **[10]** Να δειχθεί ότι μια ομάδα δεν είναι ποτέ ένωση δύο γνήσιων υποομάδων της.

2. **[5]** Θεωρούμε την κυκλική υποομάδα $H = \langle([3]_6, [7]_{15}, [4]_7)\rangle$ της ομάδας ευθύ γινόμενο $G = \mathbb{Z}_6 \times \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{Z}_7$ η οποία παράγεται από το στοιχείο $x = ([3]_6, [7]_{15}, [4]_7)$. Να υπολογισθεί η τάξη του στοιχείου x και ακολούθως να δειχθεί ότι η ομάδα πηλίκο G/H είναι κυκλική.

Θέμα 5. Θεωρούμε τα εξής υποσύνολα της ομάδας $\mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$ των αντιστρέψιμων 3×3 πινάκων υπεράνω του $\mathbb{R}$:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} x & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid a, b, x, y \in \mathbb{R},\ x, y \neq 0 \right\} \quad \text{και} \quad H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_3(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. **[5]** Να δειχθεί ότι το υποσύνολο G είναι μια υποομάδα της $\mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$.
2. **[10]** Να δειχθεί ότι το υποσύνολο H είναι μια κανονική υποομάδα της G και η ομάδα πηλίκο G/H είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, όπου $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.
3. **[5]** Να δείξετε ότι η ομάδα H είναι ισόμορφη με την ομάδα ευθύ γινόμενο $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Θέμα 6. Έστω $q \in \mathbb{R}$ ένας πραγματικός αριθμός. Θεωρούμε το ακόλουθο σύνολο 2×2 πινάκων

$$R_q = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ qb & a \end{pmatrix} \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

1. **[7]** Να δειχθεί ότι το σύνολο R_q είναι ένας μεταθετικός υποδακτύλιος του δακτυλίου $\mathsf{M}_2(\mathbb{R})$.
2. **[8]** Αν $q = 0$, να βρεθεί ένα ιδεώδες I του δακτυλίου R_0 έτσι ώστε $R_0/I \cong \mathbb{R}$.
3. **[5]** Αν $q = -1$, να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R_{-1} είναι ισόμορφος με το σώμα των μιγαδικών αριθμών.

Θέμα 7. 1. **[5]** Για κάθε θετικό ακέραιο n, να δείξετε ότι υπάρχει ένας ισομορφισμός δακτυλίων $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$.

2. **[10]** Να βρεθούν τα πρώτα και μέγιστα ιδεώδη του $\mathbb{Z}_{2015}$. Πόσα αντιστρέψιμα στοιχεία έχει ο δακτύλιος $\mathbb{Z}_{2015}$;

Θέμα 8. Έστω R ένας μεταθετικός δακτύλιος με μονάδα $1_R \neq 0_R$.

1. **[5]** Να δειχθεί ότι ο δακτύλιος R είναι σώμα αν και μόνον αν ο R έχει ακριβώς δύο ιδεώδη.
2. **[5]** Να δειχθεί ότι αν ο R έχει πεπερασμένο πλήθος στοιχείων, τότε κάθε πρώτο ιδεώδες του R είναι μέγιστο.
3. **[5]** Αν ο R είναι ακέραια περιοχή και (a) και (b) είναι τα κύρια ιδεώδη του R τα οποία παράγονται απο τα στοιχεία $a, b \in R$ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι: $(a) = (b) \iff a = x\,b$ για κάποιο αντιστρέψιμο στοιχείο $x \in R$.

- Να γραφούν τα θέματα **1.**, **2.**, **3.**, **4.**, **5.**, **6.**, και μόνον ένα εκ των θεμάτων **7.**, **8.**

Καλή Επιτυχία!